

**Nationale Mathematikolympiade****Kreisphase/Sektorenphase der Hauptstadt Bucharest, 2026****IX-te Klasse**

Aufgabe 1. Wir betrachten die Zahlen a, b, c und die Gleichungen $x^2 + 4ax + (b+c)^2 = 0$, $x^2 + 4bx + (c+a)^2 = 0$, beziehungsweise $x^2 + 4cx + (a+b)^2 = 0$.

- a) Zeigt, dass wenigstens eine der drei Gleichungen reelle Lösungen hat.
b) Beweist, dass, wenn die Gleichungen eine gemeinsame Lösung haben, dann $a = b = c$ gilt.

Aufgabe 2. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, O der Schnittpunkt seiner Diagonalen und G_1, G_2, G_3 die Schwerpunkte der Dreiecke ABD, ABC , beziehungsweise ODC . Beweist, dass O der Schwerpunkt des Dreiecks $G_1G_2G_3$ dann und genau dann ist, wenn $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Gazeta Matematică

Aufgabe 3. Bestimmt die von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n , für welche die Zahl

$$4^{n-1} + n^2 + 11$$

eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 4. Bestimmt die Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ von natürlichen von Null verschiedenen Zahlen, welche zugleich die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

$$(1) \ i + j \text{ ist ein Teiler von } a_i + a_j;$$

$$(2) \ a_i + a_j \text{ ist ein Teiler von } (i + j)^2,$$

für jede von Null verschiedenen natürlichen Zahlen i, j .

Arbeitszeit 3 Stunden.

Jede Aufgabe wird mit 22,5 Punkte bewertet.